# LÍMITES DE FUNCIONES. CONTINUDAD

## Significado del límite

***Ejercicio nº 1.-***

**Representa gráficamente y explica el significado de la expresión:**

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{5x^2-1}{x^2+2x}=5$$

***Ejercicio nº 2.-***

**Explica el significado de la siguiente expresión y represéntalo gráficamente:**

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3}=6$$

***Ejercicio nº 3.-***

**Escribe una definición para la siguiente expresión y represéntala gráficamente:**

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=-\infty$$

***Ejercicio nº 4.-***

**Da una definición para esta expresión y represéntala gráficamente:**

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{3x^2}{x^2-1}=+\infty$$

***Ejercicio nº 5.-***

**Dado el siguiente resultado:**

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2-2}{x^2+1}=2$$

**explica su significado y represéntalo gráficamente.**

## Cálculo de límites

***Ejercicio nº 6.-***

**Calcula:**

**a)** $\lim_{x\to+\infty} \left[e^x-x^2+1\right]$ **b)** $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^4-3x}{\log x^2}$

***Ejercicio nº 7.-***

**Obtén el valor de los siguientes límites:**

a) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{3-2\sqrt{x^4+1}}{\sqrt{2x^4+1}}$  b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left[\dfrac{x^2-1}{x+2} - \dfrac{x^3}{x^2+1}\right]$

***Ejercicio nº 8.-***

**Calcula los siguientes límites:**

a) $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\dfrac{2x-1}{3x+2}\right)^{x^2}$  b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{2x-2}{3+2x}\right)^{x+1}$

***Ejercicio nº 9.-***

**Halla el límite:**

$$\lim_{x\to 3} \left[\frac{2x}{x^2-9} - \frac{x+1}{x-3}\right]$$

***Ejercicio nº 10.-***

**Halla el límite:**

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{x^2-3x+1}{5x+1}\right)^{\frac{3}{x}}$$

***Ejercicio nº 11.-***

**Halla los siguientes límites:**

a) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left[2^x - x^2\right]$  b) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\ln\left(x^2+1\right)}{x}$

***Ejercicio nº 12.-***

**Halla los siguientes límites:**

a) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left[\dfrac{3x^2}{x+1} - \dfrac{x^3}{x^2+1}\right]$  b) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{2x-3}{\sqrt{3x^2+1}}$

***Ejercicio nº 13.-***

**Halla los límites:**

a) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{2x}$  b) $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\dfrac{4x^2-7}{3x^2+9x}\right)^{x}$

**_Ejercicio nº 14.-_**

**Calcula el límite:**

$$\lim_{x \to -1} \frac{3x^2 + x - 2}{x^3 + x^2 - x - 1}$$

**_Ejercicio nº 15.-_**

**Calcula:**

$$\lim_{x \to 3} \left( \frac{2x^2 - x + 1}{4x + 4} \right)^{\frac{2x}{x-3}}$$

**_Ejercicio nº 16.-_**

**Calcula los siguientes límites:**

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[ x^3 - \log x \right]$ b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3^x}{x^2 + 1}$

**_Ejercicio nº 17.-_**

**Calcula los límites:**

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[ \sqrt{3x^2 - 1} - 2x \right]$ b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt[3]{2x^5 - 1}}{\sqrt{x^4 + 2}}$

**_Ejercicio nº 18.-_**

**Calcula:**

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left( 2 + \dfrac{1}{x} \right)^{2x-3}$ b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left( \dfrac{3x^2}{2 + 3x^2} \right)^{\frac{x+1}{2}}$

**_Ejercicio nº 19.-_**

**Calcula el siguiente límite:**

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{2x + 4} - 2}{\sqrt{x + 1} - 1}$$

**_Ejercicio nº 20.-_**

**Halla el siguiente límite:**

$$\lim_{x \to 2} \left( \frac{3x - 2}{x^2 - 2x + 4} \right)^{\frac{x}{x-2}}$$

***Ejercicio nº 21.-***

**Calcula estos límites:**

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[ 3x^2 - \sqrt{x^9 + 1} \right]$ b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^x}{x+1}$

***Ejercicio nº 22.-***

**Calcula los siguientes límites:**

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x+2}{\sqrt{5x^2 - 3x + 1}}$ b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left[ \sqrt{x^2 - 3x} + 2x \right]$

***Ejercicio nº 23.-***

**Halla:**

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left( \dfrac{5x-2}{4+5x} \right)^{\frac{2x}{3}}$ b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left( \dfrac{4x-2}{3x+5} \right)^{x^2-1}$

***Ejercicio nº 24.-***

**Calcula:**

$$\lim_{x \to 1} \sqrt[3]{\frac{2x^3 - 3x^2 + 1}{3x^3 - 8x^2 + 7x - 2}}$$

***Ejercicio nº 25.-***

**Calcula el límite:**

$$\lim_{x \to 1} \left( \frac{2x+4}{x^2 - x + 6} \right)^{\frac{3x}{x-1}}$$

***Ejercicio nº 26.-***

**Obtén el valor de los siguientes límites:**

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2 - 2}{\log x}$ b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x+1}{2^x}$

***Ejercicio nº 27.-***

**Halla los límites:**

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[ \sqrt{5x^2 - 2x} - 3x \right]$ b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2 + 3x - 1}{\sqrt{x^6 - 2x}}$

***Ejercicio nº 28.-***

**Calcula estos límites:**

a) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{2-3x}{-2x+1}\right)^{\frac{-x}{2}}$ b) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{1+2x}{2x+5}\right)^{2x^2-1}$

***Ejercicio nº 29.-***

**Halla el valor del siguiente límite:**

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x^2+x-10}{x^3-3x^2+4}$$

***Ejercicio nº 30.-***

**Calcula el siguiente límite:**

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2-2x+3}{x+1}\right)^{\frac{1}{x-1}}$$

# Continuidad

***Ejercicio nº3 1.-***

**Estudia la continuidad de la siguiente función. Si en algún punto no es continua, indica el tipo de discontinuidad que hay:**

$$f(x)=\frac{x^3-x^2-5x-3}{x^2-1}$$

***Ejercicio nº 32.-***

**Halla los valores de $a$ y $b$ para que la siguiente función sea continua:**

$$f(x)=\begin{cases} 3x-a & \text{si} \quad x<1 \\ 2x^2+bx+a & \text{si} \quad 1\le x<2 \\ 3x+1 & \text{si} \quad x\ge 2 \end{cases}$$

***Ejercicio nº 33.-***

**Estudia la continuidad de la siguiente función:**

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{2x+3}{x} & \text{si} \quad x<-1 \\ x^2-2 & \text{si} \quad -1\le x<2 \\ 3x+1 & \text{si} \quad x\ge 2 \end{cases}$$

***Ejercicio nº 34.-***

**Calcula el valor de $a$ para que la siguiente función sea continua:**

$$f(x)=\begin{cases} ax^2-2x+1 & \text{si} \quad x\le 1 \\ 3a+\ln x & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$$

***Ejercicio nº 35.-***

**Estudia la continuidad de la siguiente función. En los puntos en los que no sea continua, indica el tipo de discontinuidad que presenta:**

$$f(x)=\frac{3x^2-2x-8}{x^2+3x-10}$$

***Ejercicio nº 36.-***

**Halla el valor de $k$ para que la siguiente función sea continua en $x=2$:**

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{3x^3-11x^2+8x+4}{4x^3-14x^2+8x+8} & \text{si} \quad x\ne 2 \\ k & \text{si} \quad x=2 \end{cases}$$

***Ejercicio nº 37.-***

**Estudia la continuidad de la función:**

$$f(x)=\begin{cases} e^x & \text{si} \quad x<0 \\ 3x^2+1 & \text{si} \quad 0\le x<1 \\ 4+\ln x & \text{si} \quad x\ge 1 \end{cases}$$

***Ejercicio nº 38.-***

**Calcula los valores de $a$ y $b$ para que la siguiente función sea continua:**

$$f(x)=\begin{cases} ax^2-2x & \text{si} \quad x\le 1 \\ 4x^2+ax+b & \text{si} \quad 1\le x<2 \\ 3x+b & \text{si} \quad x\ge 2 \end{cases}$$

***Ejercicio nº 39.-***

**Dada la función $f(x)=\dfrac{3x^3+15x^2+x+5}{x^2+3x-10}$, estudia su continuidad. Indica el tipo de discontinuidad que hay en los puntos en los que no es continua.**

***Ejercicio nº 40.-***

**Halla el valor de *a* para que la siguiente función sea continua:**

$$f(x)=\begin{cases} 2^x+a & \text{si} \quad x\leq 1 \\ x^2-3a+5 & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$$

# Teorema de Bolzano

***Ejercicio nº 41.-***

**Demuestra que la ecuación:**

$$x^7+3x^2-2x+1=0$$

**tiene, al menos, una solución real. Determina un intervalo de amplitud menor que 2 en el que se encuentre la raíz.**

***Ejercicio nº 42.-***

**Demuestra que la ecuación $e^{-3x}+4x-2=0$ tiene, al menos, una solución real en el intervalo $[0, 1]$.**

***Ejercicio nº 43-***

**Halla un intervalo de amplitud menor que 2 en el que la siguiente ecuación tenga, al menos, una raíz real:**

$$3x^3+2x-7=0$$

***Ejercicio nº 44.-***

**Dada la función $f(x)=x^3+2x+1$, encuentra un intervalo de amplitud menor que 2 en el que $f(x)$ corta al eje $OX$.**

***Ejercicio nº 45.-***

**Prueba que la función $f(x)=3x+\cos \pi x+1$ corta al eje $OX$ en el intervalo $[-1, 0]$.**

# SOLUCIONES LÍMITES Y CONTINUDAD

## Significado del límite

***Ejercicio nº 1.-***

**Representa gráficamente y explica el significado de la expresión:**

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{5x^2 - 1}{x^2 + 2x} = 5$$

***Solución:***

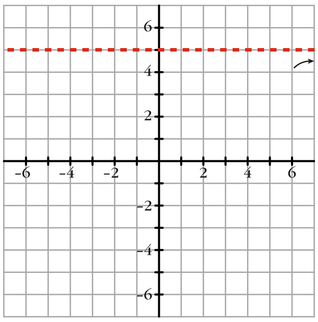
Podemos conseguir que $\frac{5x^2 - 1}{x^2 + 2x}$ esté tan próximo a 5 como queramos dando a $x$ valores suficientemente grandes.

*Con más precisión:*

Dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar un número $h$ tal que, si $x > h$, entonces

$$\left| \frac{5x^2 - 1}{x^2 + 2x} - 5 \right| < \varepsilon.$$

*Representación:*




***Ejercicio nº 2.-***

**Explica el significado de la siguiente expresión y represéntalo gráficamente:**

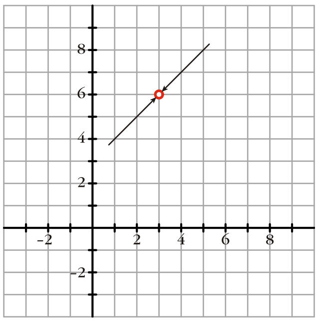
$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6$$

***Solución:***

Dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $\delta > 0$ tal que, si $x \neq 3$ y $3 - \delta < x < 3 + \delta$, entonces

$$\left| \frac{x^2 - 9}{x - 3} - 6 \right| < \varepsilon.$$

*Representación:*



**_Ejercicio nº 3.-_**

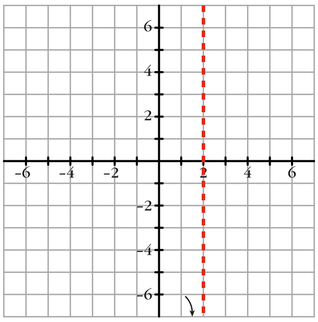
**Escribe una definición para la siguiente expresión y represéntala gráficamente:**

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$$

***Solución:***

Dado un número $k$, podemos encontrar $\delta$ tal que, si $2 - \delta < x < 2$, entonces $f(x) < -k$.

*Representación:*



**_Ejercicio nº 4.-_**

**Da una definición para esta expresión y represéntala gráficamente:**

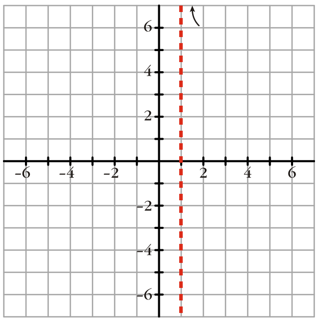
$$\lim_{x\to 1^+} \frac{3x^2}{x^2 - 1} = +\infty$$

***Solución:***

Dado un número $k$, podemos encontrar $\delta > 0$ tal que, si $1 < x < 1 + \delta$, entonces

$$\frac{3x^2}{x^2 - 1} > k.$$

*Representación*:




***Ejercicio nº 5.-***

**Dado el siguiente resultado:**

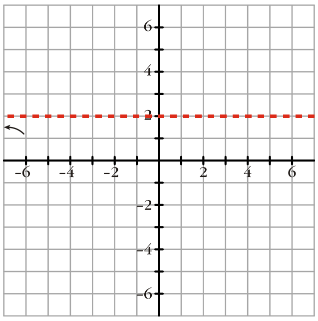
$$\lim_{x \to -\infty} \frac{2x^2 - 2}{x^2 + 1} = 2$$

**explica su significado y represéntalo gráficamente.**

***Solución:***

Dado $\varepsilon > 0$, existe un número $h$ tal que, si $x < -h$, entonces $\left| \frac{2x^2 - 2}{x^2 + 1} - 2 \right| < \varepsilon$.

*Representación:*




# Cálculo de límites

***Ejercicio nº 6.-***

**Calcula:**

**a)** $\lim_{x \to +\infty} \left[ e^x - x^2 + 1 \right]$ **b)** $\lim_{x \to -\infty} \frac{x^4 - 3x}{\log x^2}$

***Solución:***

a) $\lim_{x \to +\infty} \left[ e^x - x^2 + 1 \right] = +\infty$

Porque una exponencial de base mayor que 1 es un infinito de orden superior a una potencia.

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^4-3x}{\log x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^4+3x}{\log x^2} = +\infty$

Porque una potencia es un infinito de orden superior a un logaritmo.

***<u>Ejercicio nº 7.-</u>***

**Obtén el valor de los siguientes límites:**

**a)** $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3-2\sqrt{x^4+1}}{\sqrt{2x^4+1}}$ **b)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[\dfrac{x^2-1}{x+2} - \dfrac{x^3}{x^2+1}\right]$

***Solución:***

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3-2\sqrt{x^4+1}}{\sqrt{2x^4+1}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3-2\sqrt{x^4+1}}{\sqrt{2x^4+1}} = \dfrac{-2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[\dfrac{x^2-1}{x+2} - \dfrac{x^3}{x^2+1}\right] = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(x^2-1)(x^2+1)-x^3(x+2)}{(x+2)\,(x^2-1)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^4-1-x^4-2x^3}{x^3+x+2x^2+2} =$

$$= \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-2x^3-1}{x^3+2x^2+x+2} = -2$$

***<u>Ejercicio nº 8.-</u>***

**Calcula los siguientes límites:**

**a)** $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{2x-1}{3x+2}\right)^{x^2}$ **b)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{2x-2}{3+2x}\right)^{x+1}$

***Solución:***

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{2x-1}{3x+2}\right)^{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{-2x-1}{-3x+2}\right)^{x^2} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{+\infty} = 0$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{2x-2}{3+2x}\right)^{x+1} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2x-2}{3+2x}-1\right)\cdot(x+1)} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2x-2-3-2x}{3+2x}\right)\cdot(x+1)} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-5x-5}{3+2x}} = e^{\frac{-5}{2}}$

***<u>Ejercicio nº 9.-</u>***

**Halla el límite:**

$$\lim_{x\to 3}\left[\frac{2x}{x^2-9} - \frac{x+1}{x-3}\right]$$

***Solución:***

$$\lim_{x\to 3}\left[\frac{2x}{x^2-9} - \frac{x+1}{x-3}\right] = \lim_{x\to 3}\frac{2x-(x+1)(x+3)}{(x+3)(x-3)} = \lim_{x\to 3}\frac{2x-(x^2+4x+3)}{(x+3)(x-3)} =$$

$$= \lim_{x \to 3} \frac{-x^2 - 2x - 3}{(x+3)(x-3)} = \frac{-18}{(0)}$$

Hallamos los límites laterales:

$$\lim_{x \to 3^-} \frac{-x^2 - 2x - 3}{(x+3)(x-3)} = +\infty \; ; \qquad \lim_{x \to 3^+} \frac{-x^2 - 2x - 3}{(x+3)(x-3)} = -\infty$$

***Ejercicio nº 10.-***

**Halla el límite:**

$$\lim_{x \to 0} \left( \frac{x^2 - 3x + 1}{5x + 1} \right)^{\frac{3}{x}}$$

***Solución:***

$$\lim_{x \to 0} \left( \frac{x^2 - 3x + 1}{5x + 1} \right)^{\frac{3}{x}} = e^{\lim\limits_{x \to 0} \left( \frac{x^2-3x+1}{5x+1} - 1 \right) \cdot \frac{3}{x}} = e^{\lim\limits_{x \to 0} \left( \frac{x^2-3x+1-5x-1}{5x+1} \right) \cdot \frac{3}{x}} = e^{\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2-8x}{5x+1} \cdot \frac{3}{x}} = e^{\lim\limits_{x \to 0} \frac{3x(x-8)}{x(5x+1)}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x \to 0} \frac{3(x-8)}{5x+1}} = e^{-24}$$

***Ejercicio nº 11.-***

**Halla los siguientes límites:**

**a)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[ 2^x - x^2 \right]$ **b)** $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\ln \left( x^2 + 1 \right)}{x}$

***Solución:***

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[ 2^x - x^2 \right] = +\infty$

Porque una exponencial de base mayor que 1 es un infinito de orden superior a una potencia.

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\ln \left( x^2 + 1 \right)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln \left( x^2 + 1 \right)}{-x} = 0$

Porque las potencias son infinitos de orden superior a los logaritmos.

***Ejercicio nº 12.-***

**Halla los siguientes límites:**

**a)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[ \frac{3x^2}{x + 1} - \frac{x^3}{x^2 + 1} \right]$ **b)** $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{2x - 3}{\sqrt{3x^2 + 1}}$

***Solución:***

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{3x^2}{x+1}-\dfrac{x^3}{x^2+1}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{3x^2(x^2+1)-x^3(x+1)}{(x+1)\,(x^2+1)}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^4+3x^2-x^4-x^3}{x^3+x+x^2+1}=$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^4-x^3+3x^2}{x^3+x^2+x+1}=+\infty$$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x-3}{\sqrt{3x^2+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2x-3}{\sqrt{3x^2+1}}=\dfrac{-2}{\sqrt{3}}=\dfrac{-2\sqrt{3}}{3}$

***Ejercicio nº 13.-***

**Halla los límites:**

**a)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{2x}$ **b)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{4x^2-7}{3x^2+9x}\right)^{x}$

***Solución:***

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{2x}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-2}-1\right)\cdot 2x}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+1-x^2+2}{x^2-2}\right)\cdot 2x}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{6x}{x^2-2}}=e^0=1$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{4x^2-7}{3x^2+9x}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{4x^2-7}{3x^2-9x}\right)^{-x}=\left(\dfrac{4}{3}\right)^{-\infty}=\left(\dfrac{3}{4}\right)^{+\infty}=0$

***Ejercicio nº 14.-***

**Calcula el límite:**

$$\lim_{x\to-1}\frac{3x^2+x-2}{x^3+x^2-x-1}$$

***Solución:***

$$\lim_{x\to-1}\frac{3x^2+x-2}{x^3+x^2-x-1}=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)\,(3x-2)}{(x+1)^2\,(x-1)}=\lim_{x\to-1}\frac{3x-2}{(x+1)\,(x-1)}=\frac{-5}{(0)}$$

Hallamos los límites laterales:

$$\lim_{x\to-1^-}\frac{3x-2}{(x+1)\,(x-1)}=-\infty\,; \qquad \lim_{x\to-1^+}\frac{3x-2}{(x+1)\,(x-1)}=+\infty$$

***Ejercicio nº 15.-***

**Calcula:**

$$\lim_{x\to3}\left(\frac{2x^2-x+1}{4x+4}\right)^{\frac{2x}{x-3}}$$

***Solución:***

$$\lim_{x\to 3}\left(\frac{2x^2-x+1}{4x+4}\right)^{\frac{2x}{x-3}}=e^{\lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{2x^2-x+1}{4x+4}-1\right)\cdot\frac{2x}{x-3}}=e^{\lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{2x^2-x+1-4x-4}{4x+4}\right)\cdot\frac{2x}{x-3}}=e^{\lim\limits_{x\to 3}\frac{2x^2-5x-3}{4x+4}\cdot\frac{2x}{x-3}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 3}\frac{(2x+1)(x-3)(2x)}{(4x+4)(x-3)}}=e^{\lim\limits_{x\to 3}\frac{(2x+1)(2x)}{(4x+4)}}=e^{\frac{42}{16}}=e^{\frac{21}{8}}$$

***<u>Ejercicio nº 16.-</u>***

**Calcula los siguientes límites:**

**a)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x^3-\log x\right]$ **b)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3^x}{x^2+1}$

***Solución:***

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x^3-\log x\right]=+\infty$

Porque las potencias son infinitos de orden superior a los logaritmos.

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3^x}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3^{-x}}{x^2+1}=\frac{0}{+\infty}=0$

***<u>Ejercicio nº 17.-</u>***

**Calcula los límites:**

**a)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt{3x^2-1}-2x\right]$ **b)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[3]{2x^5-1}}{\sqrt{x^4+2}}$

***Solución:***

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt{3x^2-1}-2x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{3x^2-1}-2x\right)\left(\sqrt{3x^2-1}-2x\right)}{\sqrt{3x^2-1}+2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x^2-1-4x^2}{\sqrt{3x^2-1}+2x}=$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^2-1}{\sqrt{3x^2-1}+2x}=-\infty$$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[3]{2x^5-1}}{\sqrt{x^4+2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{-2x^5-1}}{\sqrt{x^4+2}}=0$

***<u>Ejercicio nº 18.-</u>***

**Calcula:**

**a)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2+\frac{1}{x}\right)^{2x-3}$ **b)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{3x^2}{2+3x^2}\right)^{\frac{x+1}{2}}$

***Solución:***

a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2+\dfrac{1}{x}\right)^{2x-3} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(2-\dfrac{1}{x}\right)^{-2x-3} = 2^{-\infty} = 0$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3x^2}{2+3x^2}\right)^{\frac{x+1}{2}} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{3x^2}{2+3x^2}-1\right)\cdot\left(\frac{x+1}{2}\right)} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{3x^2-2-3x^2}{2+3x^2}\right)\cdot\left(\frac{x+1}{2}\right)} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-2x-2}{4+6x^2}} = e^0 = 1$

***<u>Ejercicio nº 19.-</u>***

**Calcula el siguiente límite:**

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2x+4}-2}{\sqrt{x+1}-1}$$

***Solución:***

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2x+4}-2}{\sqrt{x+1}-1} = \lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{2x+4}-2)\,(\sqrt{2x+4}+2)\,(\sqrt{x+1}+1)}{(\sqrt{x+1}-1)\,(\sqrt{x+1}+1)\,(\sqrt{2x+4}+2)} = \lim_{x\to 0}\frac{(2x+4-4)\,(\sqrt{x+1}+1)}{(x+1-1)\,(\sqrt{2x+4}+2)} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2x(\sqrt{x+1}+1)}{x(\sqrt{2x+4}+2)} = \lim_{x\to 0}\frac{2(\sqrt{x+1}+1)}{\sqrt{2x+4}+2} = \frac{4}{4} = 1$$

***<u>Ejercicio nº 20.-</u>***

**Halla el siguiente límite:**

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{3x-2}{x^2-2x+4}\right)^{\frac{x}{x-2}}$$

***Solución:***

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{3x-2}{x^2-2x+4}\right)^{\frac{x}{x-2}} = e^{\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{3x-2}{x^2-2x+4}-1\right)\cdot\frac{x}{x-2}} = e^{\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{3x-2-x^2+2x-4}{x^2-2x+4}\right)\cdot\frac{x}{x-2}} = e^{\lim\limits_{x\to 2}\frac{(-x^2+5x-6)x}{(x^2-2x+4)\,(x-2)}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 2}\frac{-x(x-3)\,(x-2)}{(x^2-2x+4)\,(x-2)}} = e^{\lim\limits_{x\to 2}\frac{-x(x-3)}{(x^2-2x+4)}} = e^{\frac{2}{4}} = e^{\frac{1}{2}}$$

***<u>Ejercicio nº 21.-</u>***

**Calcula estos límites:**

**a)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[3x^2-\sqrt{x^9+1}\right]$ **b)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x}{x+1}$

***Solución:***

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[3x^2-\sqrt{x^9+1}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[-x^{\frac{9}{2}}\right]=-\infty$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x}{x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{-x}}{-x+1}=\dfrac{0}{-\infty}=0$

***<u>Ejercicio nº 22.-</u>***

**Calcula los siguientes límites:**

**a)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x+2}{\sqrt{5x^2-3x+1}}$ **b)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\sqrt{x^2-3x}+2x\right]$

***Solución:***

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x+2}{\sqrt{5x^2-3x+1}}=\dfrac{3}{\sqrt{5}}=\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\sqrt{x^2-3x}+2x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2+3x}-2x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\sqrt{x^2+3x}-2x\right)\left(\sqrt{x^2+3x}+2x\right)}{\sqrt{x^2+3x}+2x}=$

$$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+3x-4x^2}{\sqrt{x^2+3x}+2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-3x^2+3x}{\sqrt{x^2+3x}+2x}=-\infty$$

***<u>Ejercicio nº 23.-</u>***

**Halla:**

**a)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{5x-2}{4+5x}\right)^{\frac{2x}{3}}$ **b)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{4x-2}{3x+5}\right)^{x^2-1}$

***Solución:***

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{5x-2}{4+5x}\right)^{\frac{2x}{3}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{5x-2}{4+5x}-1\right)\cdot\frac{2x}{3}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{5x-2-4-5x}{4+5x}\right)\cdot\frac{2x}{3}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-12x}{12+15x}}=e^{\frac{-12}{15}}=e^{\frac{-4}{5}}$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{4x-2}{3x+5}\right)^{x^2-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{-4x-2}{-3x+5}\right)^{x^2-1}=\left(\dfrac{4}{3}\right)^{+\infty}=+\infty$

***<u>Ejercicio nº 24.-</u>***

**Calcula:**

$$\lim\limits_{x\to1}\sqrt[3]{\frac{2x^3-3x^2+1}{3x^3-8x^2+7x-2}}$$

***Solución:***

$$\underset{x\to 1}{lím}\sqrt[3]{\frac{2x^3-3x^2+1}{3x^3-8x^2+7x-2}}=\underset{x\to 1}{lím}\sqrt[3]{\frac{(2x+1)(x-1)^2}{(3x-2)(x-1)^2}}=\underset{x\to 1}{lím}\sqrt[3]{\frac{2x+1}{3x-2}}=\sqrt[3]{3}$$

***<u>Ejercicio nº 25.-</u>***

**Calcula el límite:**

$$\underset{x\to 1}{\boldsymbol{lím}}\left(\frac{\mathbf{2x+4}}{\mathbf{x^2-x+6}}\right)^{\frac{\mathbf{3x}}{\mathbf{x-1}}}$$

***Solución:***

$$\underset{x\to 1}{lím}\left(\frac{2x+4}{x^2-x+6}\right)^{\frac{3x}{x-1}}=e^{\underset{x\to 1}{lím}\left(\frac{2x+4}{x^2-x+6}-1\right)\cdot\frac{3x}{x-1}}=e^{\underset{x\to 1}{lím}\left(\frac{2x+4-x^2+x-6}{x^2-x+6}\right)\cdot\frac{3x}{x-1}}=e^{\underset{x\to 1}{lím}\frac{(-x^2+3x-2)\,(3x)}{(x^2-x+6)\,(x-1)}}=$$

$$=e^{\underset{x\to 1}{lím}\frac{-3x(x-2)\,(x-1)}{(x^2-x+6)\,(x-1)}}=e^{\underset{x\to 1}{lím}\frac{-3x(x-2)}{x^2-x+6}}=e^{\frac{3}{6}}=e^{\frac{1}{2}}$$

***<u>Ejercicio nº 26.-</u>***

**Obtén el valor de los siguientes límites:**

**a)** $\underset{x\to+\infty}{\boldsymbol{lím}}\frac{\mathbf{3x^2-2}}{\boldsymbol{log\ x}}$ **b)** $\underset{x\to-\infty}{\boldsymbol{lím}}\frac{\mathbf{x+1}}{\mathbf{2^x}}$

***Solución:***

a) $\underset{x\to+\infty}{lím}\frac{3x^2-2}{log\ x}=+\infty$

Porque las potencias son infinitos de orden superior a los logartimos.

b) $\underset{x\to-\infty}{lím}\frac{x+1}{2^x}=\underset{x\to+\infty}{lím}\frac{-x+1}{2^{-x}}=-\infty$

***<u>Ejercicio nº 27.-</u>***

**Halla los límites:**

**a)** $\underset{x\to+\infty}{\boldsymbol{lím}}\left[\sqrt{\mathbf{5x^2-2x}}-\mathbf{3x}\right]$ **b)** $\underset{x\to-\infty}{\boldsymbol{lím}}\frac{\mathbf{x^2+3x-1}}{\sqrt{\mathbf{x^6-2x}}}$

***Solución:***

a) $\underset{x\to+\infty}{lím}\left[\sqrt{5x^2-2x}-3x\right]=\underset{x\to+\infty}{lím}\frac{\left(\sqrt{5x^2-2x}-3x\right)\left(\sqrt{5x^2-2x}+3x\right)}{\sqrt{5x^2-2x}+3x}=$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{5x^2-2x-9x^2}{\sqrt{5x^2-2x}+3x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-4x^2-2x}{\sqrt{5x^2-2x}+3x} = -\infty$$

b) $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+3x-1}{\sqrt{x^6-2x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-3x-1}{\sqrt{x^6+2x}} = 0$

***Ejercicio nº 28.-***

**Calcula estos límites:**

**a)** $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2-3x}{-2x+1}\right)^{\frac{-x}{2}}$ **b)** $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1+2x}{2x+5}\right)^{2x^2-1}$

***Solución:***

a) $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2-3x}{-2x+1}\right)^{\frac{-x}{2}} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2+3x}{2x+1}\right)^{\frac{x}{2}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{+\infty} = +\infty$

b) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1+2x}{2x+5}\right)^{2x^2-1} = e^{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1+2x}{2x+5}-1\right)\cdot\left(2x^2-1\right)} = e^{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1+2x-2x-5}{2x+5}\right)\cdot\left(2x^2-1\right)} = e^{\lim_{x\to+\infty}\frac{-8x^2+4}{2x+5}} = e^{-\infty} = 0$

***Ejercicio nº 29.-***

**Halla el valor del siguiente límite:**

$$\lim_{x\to2}\frac{2x^2+x-10}{x^3-3x^2+4}$$

***Solución:***

$$\lim_{x\to2}\frac{2x^2+x-10}{x^3-3x^2+4} = \lim_{x\to2}\frac{(2x+5)(x-2)}{(x+1)(x-2)^2} = \lim_{x\to2}\frac{2x+5}{(x+1)(x-2)} = \frac{9}{(0)}$$

Hallamos los límites laterales:

$$\lim_{x\to2^-}\frac{2x+5}{(x+1)(x-2)} = -\infty\ ; \qquad \lim_{x\to2^+}\frac{2x+5}{(x+1)(x-2)} = +\infty$$

***Ejercicio nº 30.-***

**Calcula el siguiente límite:**

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{x^2-2x+3}{x+1}\right)^{\frac{1}{x-1}}$$

***Solución:***

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{x^2-2x+3}{x+1}\right)^{\frac{1}{x-1}} = e^{\lim_{x\to1}\left(\frac{x^2-2x+3}{x+1}-1\right)\cdot\frac{1}{x-1}} = e^{\lim_{x\to1}\left(\frac{x^2-2x+3-x-1}{x+1}\right)\cdot\frac{1}{x-1}} = e^{\lim_{x\to1}\frac{x^2-3x+2}{x+1}\cdot\frac{1}{x-1}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-2)\cdot(x-1)}{(x+1)\cdot(x-1)}} = e^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-2}{x+1}} = e^{\frac{-1}{2}}$$

# Continuidad

***Ejercicio nº3 1.-***

**Estudia la continuidad de la siguiente función. Si en algún punto no es continua, indica el tipo de discontinuidad que hay:**

$$f(x) = \frac{x^3 - x^2 - 5x - 3}{x^2 - 1}$$

***Solución:***

- Dominio $= \mathbb{R} - \{-1, 1\}$.

  $f(x)$ es continua en $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$.

- Veamos el tipo de discontinuidad que presenta en $x = -1$ y en $x = 1$:

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^3 - x^2 - 5x - 3}{x^2 - 1} = \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)^2 (x-3)}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)(x-3)}{x-1} = \frac{0}{-2} = 0$$

Discontinuidad evitable en $x = -1$.

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{(x+1)(x-3)}{x-1} = \frac{-4}{(0)}.$$ Hallamos los límites laterales:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = +\infty \; ; \qquad \lim_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$$

Discontinuidad de salto infinito en $x = 1$.

***Ejercicio nº 32.-***

**Halla los valores de *a* y *b* para que la siguiente función sea continua:**

$$f(x) = \begin{cases} 3x - a & \text{si} \quad x < 1 \\ 2x^2 + bx + a & \text{si} \quad 1 \le x < 2 \\ 3x + 1 & \text{si} \quad x \ge 2 \end{cases}$$

***Solución:***

- Dominio $= \mathbb{R}$

- Si $x \ne 1$ y $x \ne 2$ $\rightarrow$ $f(x)$ es continua, pues está formada por funciones continuas.

- En $x = 1$:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(3x-a)=3-a\\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(2x^2+bx+a\right)=2+b+a\\ f(1)=2+b+a\end{array}\right\}$$

Para que $f(x)$ sea continua en $x=1$, ha de ser:

$$3-a=2+b+a \quad\rightarrow\quad 2a+b=1$$

- En $x=2$:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\left(2x^2+bx+a\right)=8+2b+a\\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}(3x+1)=7\\ f(2)=7\end{array}\right\}$$

Para que $f(x)$ sea continua en $x=2$, ha de ser:

$$8+2b+a=7\rightarrow\quad a+2b=-1$$

- Uniendo las dos condiciones anteriores, tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l}2a+b=1\\ a+2b=-1\end{array}\right\}\begin{array}{l}b=1-2a\\ a+2(1-2a)=-1 \quad\rightarrow\quad a+2-4a=-1 \quad\rightarrow -3a=-3 \quad\rightarrow\quad a=1\ ;\qquad b=-1\end{array}$$

***<u>Ejercicio nº 33.-</u>***

**Estudia la continuidad de la siguiente función:**

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x+3}{x} & \text{si} \quad x<-1\\ x^2-2 & \text{si} \quad -1\le x<2\\ 3x+1 & \text{si} \quad x\ge 2\end{cases}$$

***Solución:***

- Dominio $=\mathbb{R}$

- Si $x\neq -1$ y $x\neq 2$ $\quad\rightarrow\quad$ $f(x)$ es continua, pues está formada por funciones que son continuas en los intervalos correspondientes.

- En $x=-1$:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{2x+3}{x}=-1\\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}\left(x^2-2\right)=-1\\ f(-1)=-1\end{array}\right\} f(x) \text{ es continua en } x=-1.$$

- En $x=2$:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\left(x^2-2\right)=2\\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\left(3x+1\right)=7\end{array}\right\}$$ $f(x)$ es discontinua en $x=2$. Hay una discontinuidad de salto finito.

***Ejercicio nº 34.-***

**Calcula el valor de *a* para que la siguiente función sea continua:**

$$f(x)=\begin{cases} ax^2-2x+1 & \text{si} \quad x\le 1\\ 3a+\ln x & \text{si} \quad x>1\end{cases}$$

***Solución:***

- Dominio $=\mathbb{R}$

- Si $x\neq 1 \ \rightarrow \ f(x)$ es continua, pues está formada por funciones continuas.

- En $x=1$:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(ax^2-2x+1\right)=a-1\\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(3a+\ln x\right)=3a\\ f(1)=a-1\end{array}\right\}$$

Para que f (x) sea continua en x = 1, ha de ser:

$$a-1=3a \ \rightarrow \ 2a=-1 \ \rightarrow \ a=-\frac{1}{2}$$

***Ejercicio nº 35.-***

**Estudia la continuidad de la siguiente función. En los puntos en los que no sea continua, indica el tipo de discontinuidad que presenta:**

$$f(x)=\frac{3x^2-2x-8}{x^2+3x-10}$$

***Solución:***

$$f(x)=\frac{3x^2-2x-8}{x^2+3x-10}=\frac{(3x+4)(x-2)}{(x+5)(x-2)}$$

- Dominio $=\mathbb{R}-\{-5, 2\}$

  $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}-\{-5, 2\}$.

- Veamos el tipo de discontinuidad que presenta en $x=-5$ y en $x=2$:

$$\lim_{x\to -5} f(x)=\lim_{x\to -5}\frac{3x+4}{x+5}=\frac{-11}{(0)}.$$ Hallamos los límites laterales:

$$\lim_{x \to -5^-} f(x) = +\infty \quad ; \quad \lim_{x \to -5^+} f(x) = -\infty$$

Discontinuidad de salto infinito en $x = -5$.

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{3x+4}{x+5} = \frac{10}{7}$$

Discontinuidad evitable en $x = 2$.

***<u>Ejercicio nº 36.-</u>***

**Halla el valor de $k$ para que la siguiente función sea continua en $x = 2$:**

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x^3 - 11x^2 + 8x + 4}{4x^3 - 14x^2 + 8x + 8} & \text{si} \quad x \neq 2 \\ k & \text{si} \quad x = 2 \end{cases}$$

***Solución:***

Para que $f(x)$ sea continua en $x = 2$, ha de tenerse que:

$$\lim_{x \to 2} f(x) = f(2)$$

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{3x^3 - 11x^2 + 8x + 4}{4x^3 - 14x^2 + 8x + 8} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)^2(3x+1)}{(x-2)^2(4x+2)} = \lim_{x \to 2} \frac{3x+1}{4x+2} = \frac{7}{10}$$

$$f(2) = k$$

- Por tanto, ha de ser $k = \dfrac{7}{10}$

***<u>Ejercicio nº 37.-</u>***

**Estudia la continuidad de la función:**

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si} \quad x < 0 \\ 3x^2 + 1 & \text{si} \quad 0 \leq x < 1 \\ 4 + \ln x & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

***Solución:***

- Dominio $= \mathbb{R}$
- Si $x \neq 0$ y $x \neq 1 \rightarrow f(x)$ es continua, pues está formada por funciones continuas.
- En $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} e^x=1\\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(3x^2+1\right)=1\\ f(0)=1\end{array}\right\} f(x) \text{ es continua en } x=0.$$

- En $x = 1$:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(3x^2+1\right)=4\\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(4+\ln x\right)=1\\ f(1)=4\end{array}\right\} f(x) \text{ es continua en } x=1.$$

- Por tanto, $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$.

***<u>Ejercicio nº 38.-</u>***

**Calcula los valores de $a$ y $b$ para que la siguiente función sea continua:**

$$\boldsymbol{f(x)=\begin{cases} ax^2-2x & \text{si} \quad x\le 1\\ 4x^2+ax+b & \text{si} \quad 1\le x<2\\ 3x+b & \text{si} \quad x\ge 2\end{cases}}$$

***Solución:***

- Si $x \neq 1$ y $x \neq 2$ $\rightarrow$ $f(x)$ es continua, pues está formada por funciones continuas.

- En $x = 1$:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(ax^2-2x\right)=a-2\\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(4x^2+ax+b\right)=4+a+b\\ f(1)=4+a+b\end{array}\right\}$$

Para que $f(x)$ sea continua $x = 1$, ha de ser:

$a - 2 = 4 + a + b \rightarrow b = -6$

- En $x = 2$:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\left(4x^2+ax-6\right)=10+2a\\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\left(3x-6\right)=0\\ f(2)=0\end{array}\right\}$$

Para que $f(x)$ sea continua en $x = 2$, ha de ser:

$10 + 2a = 0 \rightarrow 2a = -10 \rightarrow a = -5$

- Por tanto, $f(x)$ será continua si $a = -5$ y $b = -6$.

***Ejercicio nº 39.-***

**Dada la función $f(x)=\dfrac{3x^3+15x^2+x+5}{x^2+3x-10}$, estudia su continuidad. Indica el tipo de discontinuidad que hay en los puntos en los que no es continua.**

***Solución:***

$$f(x)=\frac{3x^3+15x^2+x+5}{x^2+3x-10}=\frac{(x+5)(3x^2+1)}{(x+5)(x-2)}$$

- Dominio $= \mathbb{R} - \{-5, 2\}$

  $f(x)$ es continua en $\mathbb{R} - \{-5, 2\}$.

- Veamos que tipo de discontinuidad que presenta en $x=-5$ y en $x=2$:

$$\lim_{x\to -5} f(x)=\lim_{x\to -5}\frac{3x^2+1}{x-2}=\frac{76}{-7}=\frac{-76}{7}$$

Discontinuidad evitable en $x=-5$.

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{3x^2+1}{x-2}=\frac{13}{(0)}.\ \text{Hallamos los límites laterales:}$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=-\infty \quad ; \quad \lim_{x\to 2^+} f(x)=+\infty$$

Discontinuidad de salto infinito en $x=2$.

***Ejercicio nº 40.-***

**Halla el valor de $a$ para que la siguiente función sea continua:**

$$f(x)=\begin{cases} 2^x+a & \text{si} \quad x\le 1 \\ x^2-3a+5 & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$$

***Solución:***

- Si $x\neq 1$ $\rightarrow$ la función es continua, pues está formada por funciones continuas.

- En $x=1$:

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\left(2^x+a\right)=2+a \\ \displaystyle\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\left(x^2-3a+5\right)=6-3a \\ f(1)=2+a \end{array}\right\}$$

Para que $f(x)$ sea continua en $x=1$, ha de ser:

$$2+a=6-3a \ \rightarrow\ 4a=4 \ \rightarrow\ a=1$$

# Teorema de Bolzano

***Ejercicio nº 41.-***

**Demuestra que la ecuación:**

$$\boldsymbol{x^7 + 3x^2 - 2x + 1 = 0}$$

**tiene, al menos, una solución real. Determina un intervalo de amplitud menor que 2 en el que se encuentre la raíz.**

***Solución:***

- Consideramos la función $f(x) = x^7 + 3x^2 - 2x + 1$, que es continua por ser polinómica.
- Tanteando, encontramos que $f(-2) = -111$; $f(-1) = 5$.
- Es decir:

$$\left.\begin{array}{l} f(x) \text{ es continua en } [-2,-1] \\ \text{signo de } f(-2) \neq \text{ signo de } f(-1) \end{array}\right\}$$

Por el teorema de Bolzano, sabemos que existe, al menos, un $c \in (-2, -1)$ tal que $f(c) = 0$.

La raíz de la ecuación es $c$.

***Ejercicio nº 42.-***

**Demuestra que la ecuación $e^{-3x} + 4x - 2 = 0$ tiene, al menos, una solución real en el intervalo [0, 1].**

***Solución:***

- Consideramos la función $f(x) = e^{-3x} + 4x - 2$, continua en $\mathbb{R}$, pues es suma de funciones continuas. En particular, será continua en [0, 1].
- Por otra parte, tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = -1 < 0 \\ f(1) = e^{-3} + 2 > 0 \end{array}\right\} \text{ signo de } f(0) \neq \text{ signo de } f(1)$$

- Por el teorema de Bolzano, podemos asegurar que existe, al menos, un $c \in -(-1, 0)$ tal que $f(c) = 0$.

La raíz de la ecuación es $c$.

***Ejercicio nº 43-***

**Halla un intervalo de amplitud menor que 2 en el que la siguiente ecuación tenga, al menos, una raíz real:**

$$\boldsymbol{3x^3 + 2x - 7 = 0}$$

***Solución:***

- Consideramos la función $f(x) = 3x^3 + 2x - 7$, continua por ser polinómica.
- Tanteando, encontramos que $f(1) = -2$; $f(2) = 21$.
- Es decir:

$$\left.\begin{array}{l} f(x) \text{ es continua en } [1,\ 2] \\ \text{signo de } f(1) \neq \text{ signo de } f(2) \end{array}\right\}$$

Por el teorema de Bolzano, sabemos que existe, al menos, un $c \in (1, 2)$ tal que $f(c) = 0$.

La raíz de la ecuación es $c$.

***<u>Ejercicio nº 44.-</u>***

**Dada la función $f(x) = x^3 + 2x + 1$, encuentra un intervalo de amplitud menor que 2 en el que $f(x)$ corta al eje $OX$.**

***Solución:***

- $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$, pues es una función polinómica.
- Tanteando, encontramos que $f(-1) = -2$, $f(0) = 1$.
- Es decir:

$$\left.\begin{array}{l} f(x) \text{ es continua en } [-1,\ 0] \\ \text{signo de } f(-1) \neq \text{ signo de } f(0) \end{array}\right\}$$

Por el teorema de Bolzano, podemos asegurar que existe, al menos, un $c \in (-1, 0)$ tal que $f(c) = 0$.

$f(x)$ cortará al eje $OX$ en $x = c$.

***<u>Ejercicio nº 45.-</u>***

**Prueba que la función $f(x) = 3x + \cos \pi x + 1$ corta al eje $OX$ en el intervalo $[-1, 0]$.**

***Solución:***

- $f(x)$ es una función continua en $\mathbb{R}$, pues es suma de funciones continuas. En particular, será continua en $[-1, 0]$.
- Por otra parte:

$$\left.\begin{array}{r} f(-1) = -3 < 0 \\ f(0) = 2 > 0 \end{array}\right\} \text{ signo de } f(-1) \neq \text{ signo de } f(0)$$

Por el teorema de Bolzano, podemos asegurar que existe, al menos, un $c \in (-1, 0)$ tal que $f(c) = 0$.

$f(x)$ cortará al eje $OX$ en $x = c$.